

M. JAUBERT

PRÉSENTATION D'UN RÉFLECTEUR PARABOLIQUE A TRÈS-COURT FOYER.

(EXTRAIT DU PROCÈS-VERBAL.)

— Séance du 29 août 1878. —

M. JAUBERT présente un réflecteur parabolique à très-court foyer dont la distance focale est égale à trois fois le diamètre. Les récentes découvertes faites en Amérique ont été obtenues à l'aide de puissants réflecteurs, de telle sorte que l'étude de ces appareils présente un intérêt réel.

M. TCHEBICHEF

Membre de l'Académie de Saint-Petersbourg, associé de l'Institut de France.

SUR LES PARALLÉLOGRAMMES LES PLUS SIMPLES, SYMÉTRIQUES AUTOUR D'UN AXE.

— Séance du 29 août 1878. —

§ 1. A l'Exposition universelle, on peut voir actuellement, les différentes applications d'un parallélogramme articulé que j'ai trouvé d'après un théorème sur les fonctions qui s'approchent le plus de zéro. Ce parallélogramme, ne contenant que trois tiges droites, donne le mouvement rectiligne avec une approximation très-notable, qui surpasse celle qu'on obtient par les parallélogrammes composés des mêmes éléments, c'est-à-dire par le parallélogramme simple de Watt et le mécanisme d'Evens.

§ 2. Ce parallélogramme est composé de deux tiges AC , A_1C_1 , d'égale longueur, qui tournent autour de deux points fixes C , C_1 , et sont reliées à leurs bouts A , A_1 par une troisième tige AA_1 (pl. II fig. 1). C'est le milieu M de cette dernière tige qui décrit une ligne droite avec une précision considérable, toutes les fois que la longueur des tiges AC , A_1C_1 et la distance CC_1 des points fixes C , C_1 remplissent les conditions suivantes :

1. La distance CC_1 doit être rigoureusement égale au tiers de la somme des lignes AC , AA_1 , A_1C_1 .

2. La longueur de la tige AA_1 doit surpasser le quart de celle des tiges AC, A_1C_1 , mais ne doit pas différer notablement de cette limite.

A mesure que la différence $AA_1 - \frac{1}{4} AC$ tend vers zéro, la longueur de la portion sensiblement rectiligne de la courbe décrite par le point M diminue, mais en même temps la rigueur avec laquelle elle représente une ligne droite croît plus rapidement que ne diminue sa longueur.

§ 3. Je vais montrer maintenant les résultats auxquels je suis parvenu en examinant un mécanisme un peu plus compliqué que le précédent. Ce mécanisme est composé de mêmes éléments, cependant le point qui décrit sensiblement une ligne droite ne se trouve plus sur la ligne AA_1 , mais sur une perpendiculaire NM , menée de son milieu (fig. 3).

D'après la méthode que nous venons de mentionner, on reconnaît que pour la précision du jeu de ce mécanisme, il est indispensable que $c = MN$ ait la valeur suivante :

$$(1) \quad c = \frac{a}{r \cos^2 \varphi} \left[\left(\frac{3}{2} r \cos \varphi - a \right) \sin \varphi - \left(r \cos \varphi - a \right) \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} \right],$$

où par r et a nous désignons la longueur des lignes $AC = A_1C_1$ et AA_1 , et par φ la valeur commune des angles $ACC_1, A_1C_1C, A_1AC, AA_1C_1$ dans la position moyenne du mécanisme.

§ 4. Toutes les fois que le lieu du point M est choisi conformément à la formule (1) et que la différence

$$(2) \quad \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - 2 \sin \varphi$$

ne s'éloigne pas trop de zéro, ce mécanisme donne le mouvement rectiligne avec une précision notable. Cette précision croît à mesure que la différence (2) s'approche de zéro, mais en même temps la longueur de l'arc qui jouit de cette précision diminue.

Dans le cas où l'on a rigoureusement

$$(3) \quad \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - 2 \sin \varphi = 0$$

cette longueur se réduit à zéro, et alors la courbe décrite par le point M a un contact du 6^me ordre avec une ligne droite.

Nous allons nous arrêter sur ce cas, limite vers lequel converge notre mécanisme à mesure que la précision de son jeu va en augmentant, et dont il diffère peu, si cette précision est suffisante.

§ 5. Pour ce cas limite, d'après les équations (1), (3), nous trouvons

$$a = \frac{2 \cos^2 \varphi \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} r; c = \frac{\cos^2 \varphi \cos 2\varphi \operatorname{tang} 3\varphi}{\cos 3\varphi} r;$$

D'après ces valeurs de $AA_1 = a$, $MN = c$, et en remarquant que $AC = A_1C_1 = r$, nous tirons des triangles CDC_1 , ADA_1 la formule suivante pour la détermination de $CC_1 = b$:

$$b = - \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} r.$$

Comme ces valeurs de a , b , c ne changent leurs signes que pour les valeurs de l'angle φ qui annulent les expressions

$$\sin 2\varphi, \cos 2\varphi, \sin 3\varphi, \cos 3\varphi$$

et qui sont

$$0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$$

il est certain que notre mécanisme ne peut changer sa forme entre les limites indiquées c'est-à-dire ;

$$\text{De } \varphi = 0, \text{ à } \varphi = 30^\circ;$$

$$\text{De } \varphi = 30^\circ, \text{ à } \varphi = 45^\circ;$$

$$\text{De } \varphi = 45^\circ, \text{ à } \varphi = 60^\circ;$$

$$\text{De } \varphi = 60^\circ, \text{ à } \varphi = 90^\circ;$$

Pour rendre bien compte de toutes les modifications que ce mécanisme peut subir, nous avons calculé, d'après les formules précédentes, les éléments pour quatre valeurs de φ , prises à égales distances de ces limites, savoir :

$$\varphi = 15^\circ; 37^\circ 30'; 52^\circ 30'; 75^\circ.$$

Les figures (3), (4), (5), (6) représentent notre mécanisme avec les éléments qu'on trouve comme nous le venons de dire, et en prenant r égal à 0.05 mètre.

Toutes ces modifications donnent le mouvement rectiligne avec le même degré de précision; notamment la courbe décrite par le point M a toujours un contact de 6^e ordre avec une ligne droite. Sans ce rapport, toutes ces modifications sont également bonnes; mais on remarque une grande différence entre elles, quand on passe au cas, où l'on cherche à obtenir le mouvement rectiligne le long d'une course plus ou moins grande.

§ 6. Dans le cas où la différence

$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - \sin 2\varphi,$$

ne se réduit pas à zéro, mais en diffère peu, le mécanisme articulé, pour lequel c a la valeur (1) donne le mouvement rectiligne avec une

grande précision, et cette précision aura lieu le long d'une courbe d'une certaine longueur. La détermination de la longueur de cette courbe se fera de la manière suivante :

En posant

$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} = T,$$

et en désignant par t celle des racines de l'équation

$$2 \sin \varphi (1 + t^2) + t (3 + t^2) - (1 - t^2) T = 0,$$

qui se rapproche le plus de 0, on cherche l'angle α_1 d'après la formule

$$\cos \alpha_1 = 1 - \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2t \sin \varphi + t^2}{1 - 2T \sin \varphi + T^2} \right)^2 - 1 \right].$$

Cet angle, pris avec les signes $+$ et $-$, donne les inclinaisons limites de la ligne AA_1 sur la ligne CC_1 pour le commencement et pour la fin de la course en question. Ayant trouvé l'angle α , nous aurons la longueur de la course cherchée par la formule

$$(4) \quad l = \frac{2(2 - T^2)}{1 - T^2} \left[\frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2t \sin \varphi + t^2)t}{(1 - t^2)^2} \right] \sin \alpha_1.$$

Le long de toute cette course, les écarts de la courbe tracée par le point M et une droite, restent comprises entre $+E$ et $-E$, la valeur E étant déterminée par la relation

$$(5) \quad E = \frac{2r(1 + 2t \sin \varphi + t^2)t^3}{(2 \sin \varphi + 3t + 2t^2 \sin \varphi + t^3)^2}.$$

§ 7. Dans le cas où l'on se propose d'obtenir une *précision* et une *course* préalablement données, on prendra pour a , r , φ , c des valeurs qui satisfont aux équations (1), (4), (5), et dans lesquelles l , E doivent avoir des valeurs données. Comme l'on doit vérifier seulement trois équations, on pourra choisir l'angle φ à volonté. Dans ce cas, en donnant à l'angle φ les valeurs que nous avons indiquées ci-dessus, on aura les quatre formes différentes du mécanisme que nous avons déjà vues. Toutes ces formes jouiront de la même précision le long de la même *course*; mais elles différeront notablement entre elles par la longueur de leurs éléments et par leur disposition.

§ 8. Pour comparer entre elles ces quatre modifications, nous allons chercher les expressions approximatives de leurs éléments, en supposant que le rapport $\frac{E}{l}$ a une valeur très-petite, ce qui a lieu toujours dans les mécanismes à grande précision.

En cherchant, dans cette hypothèse, le développement de r , a , b , c en

série, on trouve que ces développements, arrêtés aux premiers termes, donnent :

$$r = \frac{l \cos 3\varphi}{8 \sin 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}};$$

$$a = \frac{\cos^2 \varphi}{4 \operatorname{tang} 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}};$$

$$b = \frac{l^5}{8} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 2\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \cdot \frac{l}{E}};$$

$$c = \frac{\cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tang} 3\varphi}{8 \operatorname{tang} 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos 2\varphi} \frac{l}{E}}.$$

Les figures (7), (8), (9), (10) représentent les quatre formes du mécanisme en question avec leurs éléments déduits des formules précédentes en y faisant
 $\varphi = 15^\circ; 37^\circ 30'; 52^\circ 30'; 75^\circ,$
 et en posant

$$l \sqrt[5]{\frac{l}{E}} = 0^m, 25.$$

M. PICQUET

Capitaine d'artillerie. Répétiteur à l'École polytechnique.

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE (*).

— Séance du 29 août 1878. —

M. DARBOUX

Professeur suppléant à la Faculté des sciences de Paris.

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI SE RAPPORTENT A LA DÉFORMATION DES SURFACES.

— Séance du 29 août 1878. —

(*) Cette communication est réunie à celle publiée p. 95.